

L'enseignement du nombre et du calcul

Formation départementale DSDEN 50
Mathématiques
Cycle 2

Une formation en 3 temps

1) Une conférence - 2h

→ L'enseignement du **nombre**

2) Un parcours M@gistère - 5h

→ L'enseignement du **nombre** et du **calcul**

☐ Calcul en ligne, calcul mental et calcul posé (3h30)

☐ Mises en œuvre dans les classes (1h30)

3) Un retour en équipe sur les 2 premiers temps de formation - 2h

→ **Présentiel accompagné d'un formateur** au *cycle 2*

→ En **autonomie** avec une proposition de travail en *maternelle* et au *cycle 3*

L'enseignement du nombre

Objectifs de formation :

→ Faire culture commune autour de la numération ? Des numérations ?

→ Partager des pistes : opérationnalisation

Plan de la formation

CONTEXTE ET ENJEUX

ELEMENTS DE DEFINITION

SITUATIONS DE CLASSE ET PROBLEMATISATION

- **Constats**
- **Éléments de réponses**

L'ECLAIRAGE D'ERIC MOUNIER

DES PISTES POUR ENSEIGNER LE NOMBRE

DES POINTS DE VIGILANCE

CONTEXTE ET ENJEUX

Les points d'appui

Les travaux d'Éric Mounier



Deux numérations pour comprendre le nombre
Quelles différences, quelles ressemblances ?

LDAR
LABORATOIRE DE DIDACTIQUE
ANDRÉ REVAZ

Eric Mounier
ESPE de l'académie de Créteil (UPEC)
LDAR (Paris Diderot)

RECHERCHE EN DIDACTIQUE DES SCIENCES

Séminaire des inspecteurs de l'éducation nationale
chargés de mission en mathématiques
Paris, le 24 Septembre 2018

PARIS DIDEROT | UNIVERSITÉ DE ROUEN | UPEC | UNIVERSITÉ de Clermont Auvergne | UPEC | UPEC | UPEC

Les documents d'accompagnement



éduSCOL Informer et accompagner les professionnels de l'éducation

CYCLES 2 3 4

MATHÉMATIQUES

Nombres et calculs

La conférence de consensus



CONFÉRENCE DE CONSENSUS

NOMBRES ET OPÉRATIONS :
PREMIERS APPRENTISSAGES
À L'ÉCOLE PRIMAIRE

Pourquoi cette formation ?

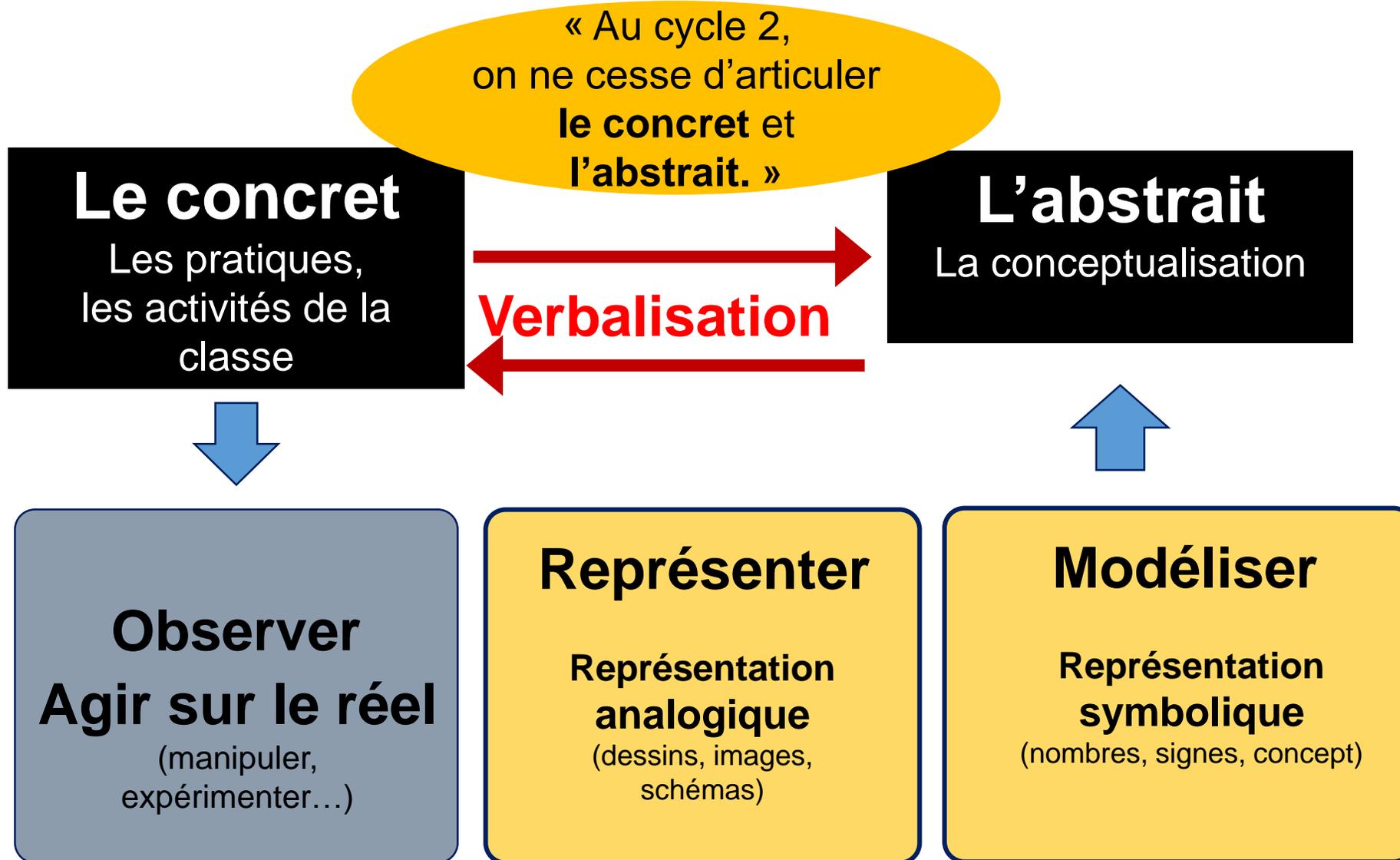
Les programmes

Le Plan Villani-Torossian

Les évaluations repères CP / CE1

Les programmes (BO 24/11/15 & 26/07/18)

Les spécificités du cycle des apprentissages fondamentaux



Les programmes (BO 24/11/15 & 26/07/18)

Les spécificités du cycle des apprentissages fondamentaux

« Au cycle 2,
on ne cesse d'articuler
le concret et
l'abstrait. »

Observer et agir sur le réel, manipuler, expérimenter,
toutes ces activités mènent à la **représentation**,
qu'elle soit analogique (dessins, images, schématisations)
ou symbolique, abstraite (nombres, concepts).



Le **lien** entre familiarisation pratique et élaboration conceptuelle
est toujours à **construire et reconstruire**, dans les **deux sens**.

Le plan Villani – Torossian

COMMENT? EN S'APPUYANT SUR LE PLAN VT

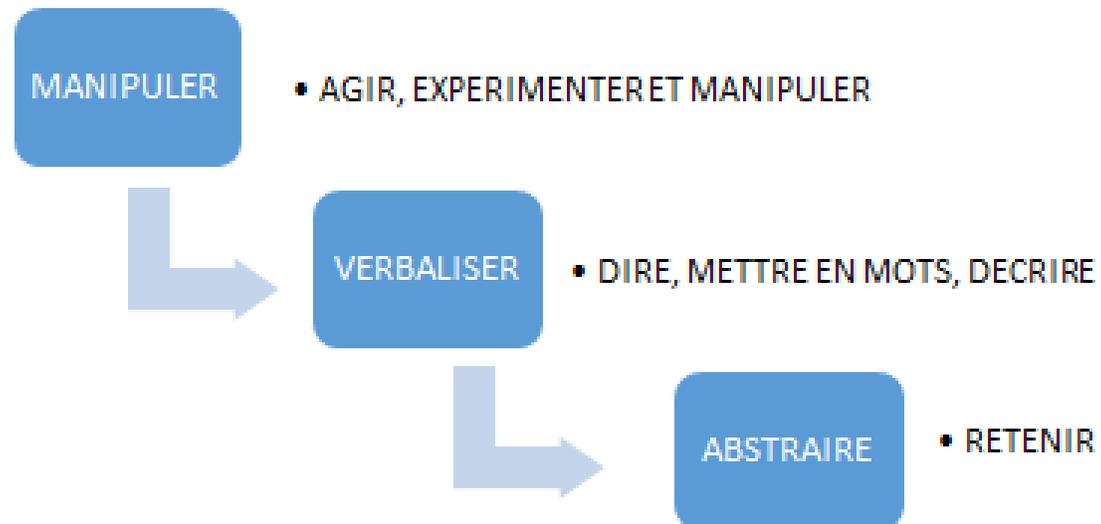


5

Les étapes d'apprentissage

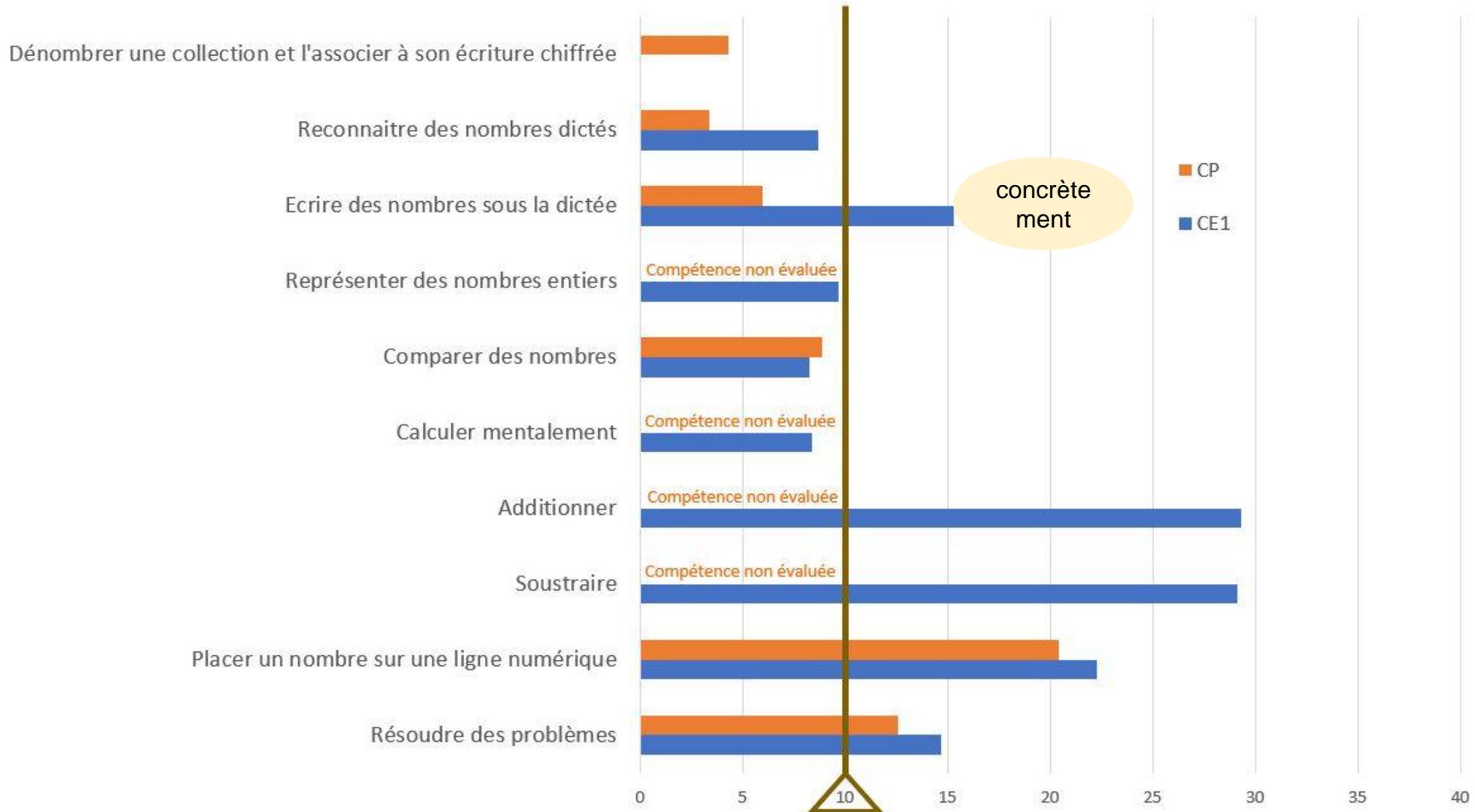
Dès le plus jeune âge mettre en œuvre un apprentissage des mathématiques fondé sur

- la manipulation et l'expérimentation;
- la verbalisation;
- l'abstraction.



Les évaluations repères CP/CE1

Pourcentages d'élèves de CP et de CE1 des écoles publiques de la Manche identifiés à besoin en mathématiques



Compétences échouées :

quel lien avec les enjeux d'apprentissage de la numération ?

Ce qui fait obstacle au CP :

- **Placer un nombre sur une file numérique**
- **Résoudre des problèmes**

Ce qui fait obstacle au CE1 :

- **Ecrire des nombres sous la dictée**
- **Placer un nombre sur une file numérique**
- **Résoudre des problèmes par le calcul**
- **Additionner et soustraire**

Les enjeux d'un enseignement explicite du nombre

1. Construire la désignation orale et écrite des nombres

→ *Numération orale et numération écrite chiffrée*

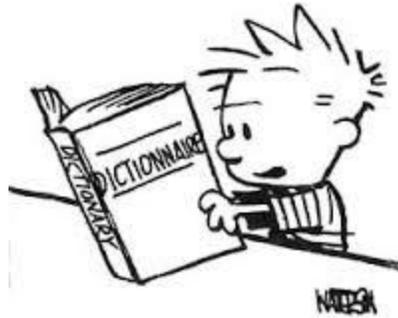
2. Appréhender les nombres avec précision

→ *Passer d'un traitement intuitif à un traitement exact des grandeurs et quantités*

3. Passer de la manipulation des objets aux opérations sur les nombres

ELEMENTS DE DEFINITION

Le nombre ... la numération ?



Le nombre est une construction intellectuelle

La numération est un mode de représentation des nombres

Notre numération repose sur 2 principes :

- principe **décimal** : numération en base 10 nécessitant dix signes pour coder tous les nombres
- principe **positionnel** : la valeur d'un chiffre dépend de sa position dans l'écriture du nombre.

Enumérer.... Dénombrer ?



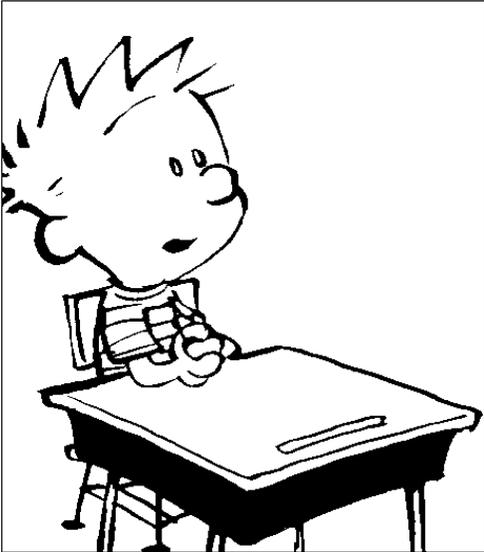
Enumérer : Enoncer une à une les parties d'un tout, les donner en détails, les nommer (énumérer des faits)

Dénombrer : donner le nombre d'éléments d'une collection.

→ 3 conditions doivent être réunies :

- *Créer mentalement des unités numériques.*
- *Les énumérer : prendre en compte toutes les unités, sans répétition ni oubli ; l'ordre n'a pas d'importance.*
- *Les totaliser : exprimer, d'une façon ou d'une autre, combien il y en a en tout.*

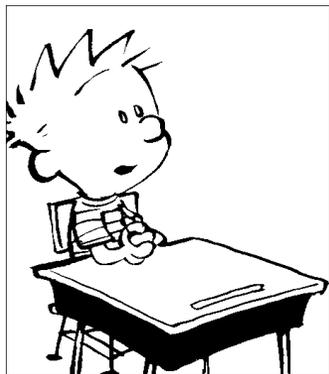
Comment travailler la numération ?



→ **Proposer des activités mettant en évidence ses 4 aspects :**

- **groupements**
- **échanges**
- **position**
- **oralisation**

À quoi sert la numération?



**À faciliter la résolution
de problèmes pratiques, c'est-à-dire :**

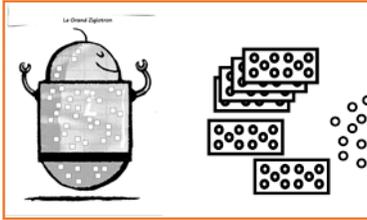
- Conserver la mémoire d'une quantité (*cardinal*)
- Conserver la mémoire d'une position (*ordinal*)
- Prévoir le résultat d'une action (*ajout, retrait, partage*)



À mieux calculer

SITUATION DE CLASSE ET PROBLEMATISATION

Un exemple en classe : la séquence Ziglotron



Objectif :
donner du sens
aux écritures chiffrées

*Les réponses des élèves
sont en rouge.*

Séance 3 : Introduction du bon de commande

Il faut **45** boutons

Ma commande :

- **quarante** paquets de dix boutons
- **cinq** boutons.

Il faut **34** boutons

Ma commande :

- **10** paquets de dix boutons
- **9** boutons.

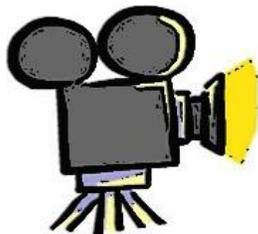
Il faut **25** boutons

Ma commande :

- **25** paquets de dix boutons
- **...** boutons.



Séance 4 :



Il faut **42** boutons

Ma commande :

- **4** paquets de dix boutons
- **2** boutons.

Constat :

Les élèves ne font **pas le lien**
entre le nombre de paquets de dix
et les chiffres dans l'écriture chiffrée du nombre.

Pourquoi ?

Mise en situation

Essayer de résoudre :

$$\bullet \text{XXXIV} \times \text{XXIII} =$$

$$\bullet \text{CXXIX} - \text{XXXVIII} =$$

Ce ne sont pas les *quantités* qui posent problème mais le **code** :

- sa **signification**
- sa **vitesse d'accès** (dans les 2 sens)
- sa **manipulation**

1^{er} élément de réponse :

Le savoir en jeu

Numération orale

Numération écrite chiffrée

[cinquante-deux]
Nom du nombre

[5] [2]
Ecriture chiffrée

Cinquante deuxième

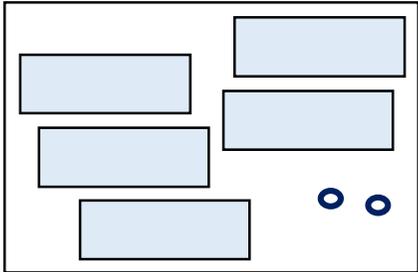
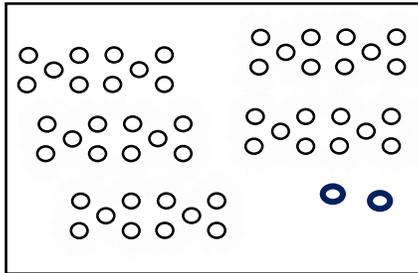
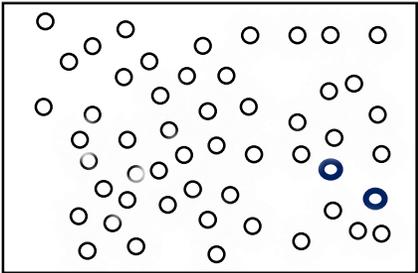
Deux après cinquante

$5 \times 10 + 2$

Comptage
un, deux, trois...
cinquante-deux

Comptage
dix, vingt... cinquante,
cinquante-et-un,
cinquante-deux

Comptage
des dizaines (5)
puis des unités restantes (2)
& **Codage**
en accolant les chiffres : **52**



Collection non organisée

Collection organisée

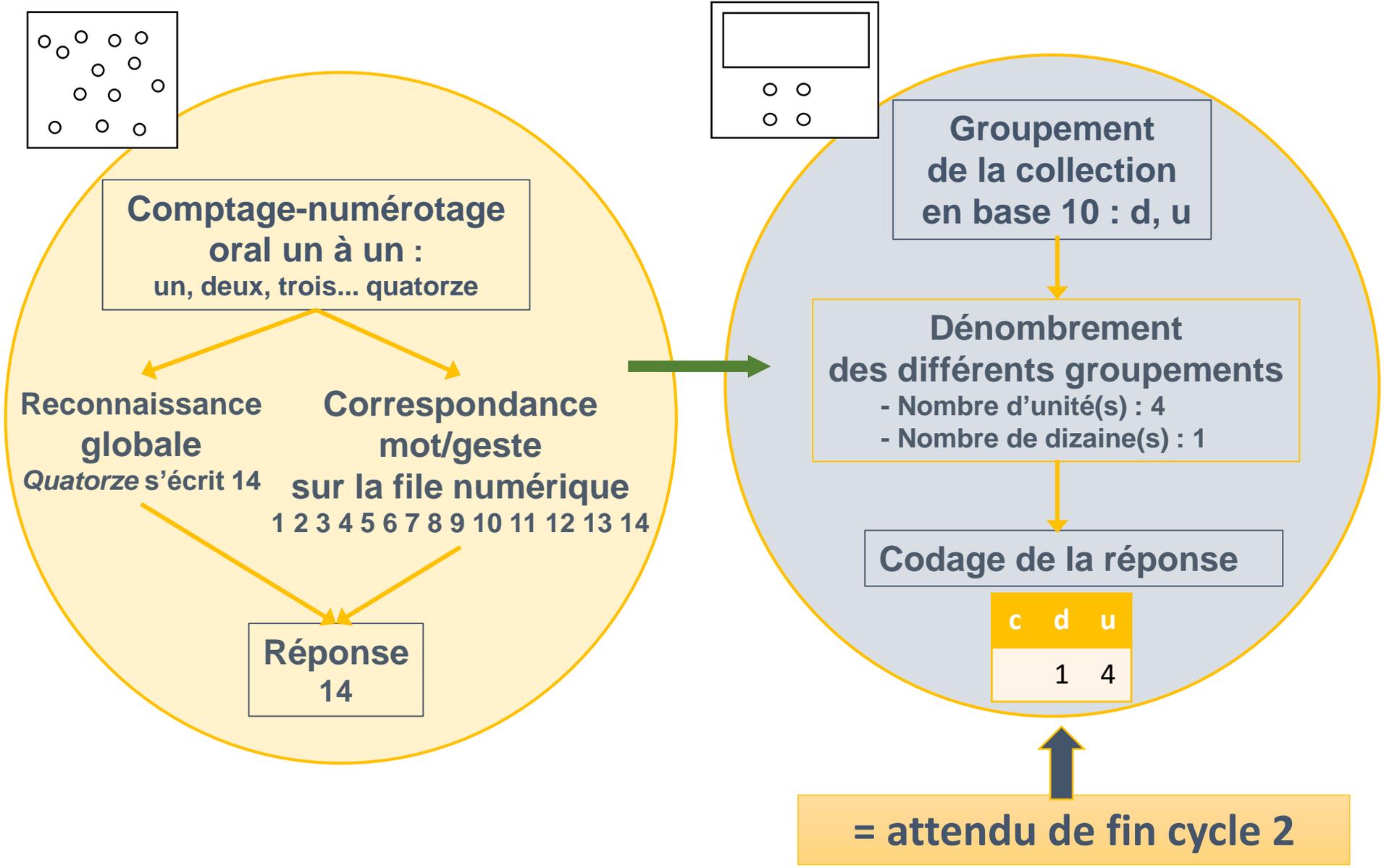
On ne connaît pas le nombre de dizaines

On connaît le nombre de dizaines

2^{ème} élément de réponse :

**La progressivité
des apprentissages**

D'une numération à l'autre...



D'un cycle à l'autre...

- **Maternelle** : compréhension du nombre via la numération orale
 - Emploi de l'écriture chiffrée comme traduction écrite du nom des nombres
 - Tâches de dénombrement via l'utilisation de la comptine numérique (orale)
- **Au CP** : comment comprendre le nombre via la numération écrite chiffrée ?
Alors que :
 - Apprentissage de la lecture/écriture du français : les écritures chiffrées comme la traduction de l'oral ...
 - Travail sur « la » numération et non les numérations
 - Décrypter les écritures chiffrées « déjà-là » (exemple de 42)

Concrètement...

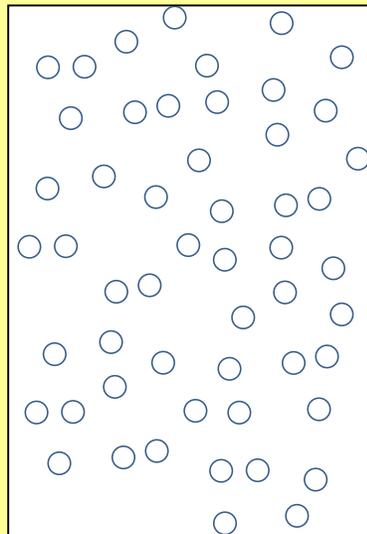
Évaluations début CE1

de **266 élèves** (Seine-Saint-Denis)

N. Grapin, N. Pfaff et E. Prigent (2013 et 2014)

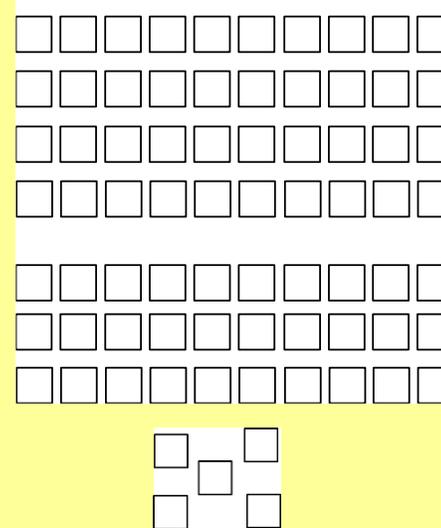
Tests 1 et 2 : Dénombrer une collection

Test 1 : Temps non limité



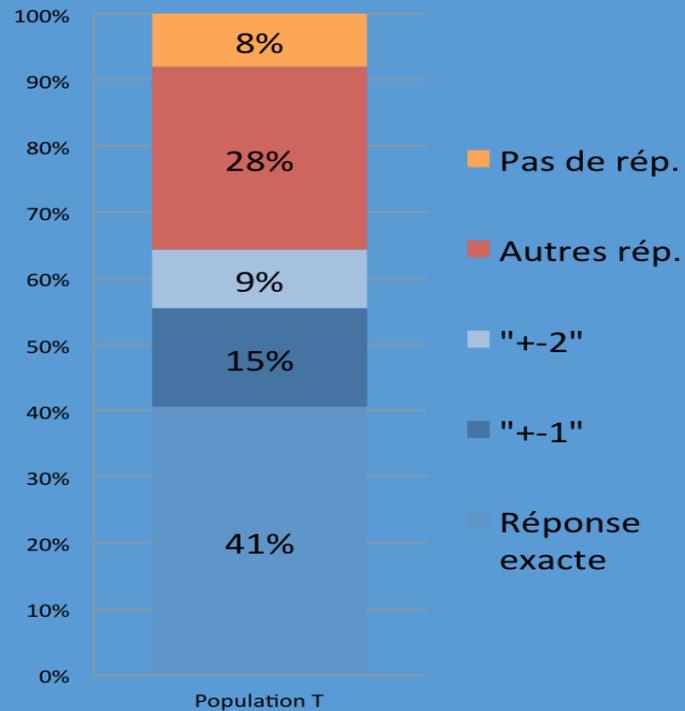
**Ecris ici le nombre
de ronds**

Test 2 : Temps limité

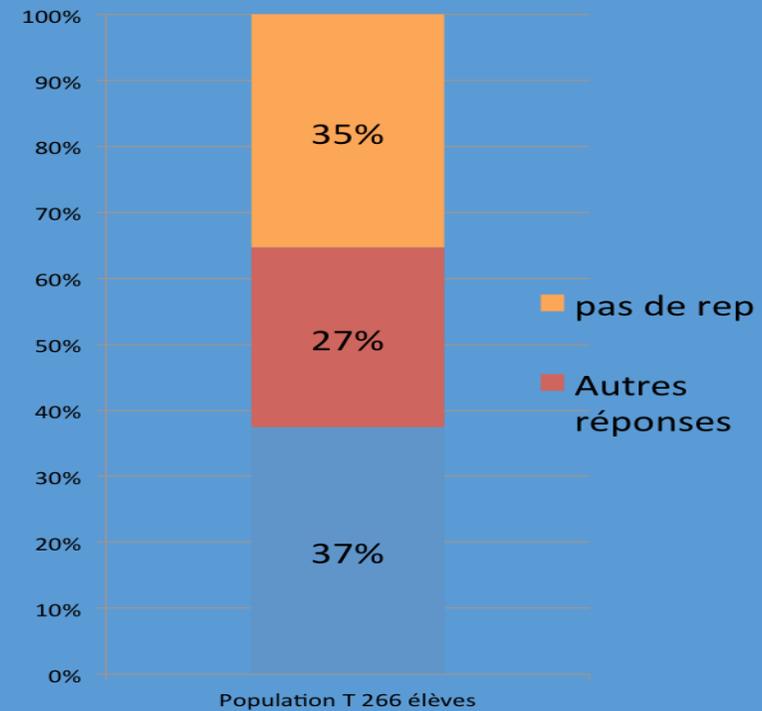


**Ecris ici le nombre
de carrés**

Test 1 : Écrire 53 ronds non organisés.



Test 2 : Écrire 75 carrés organisés en dizaines.



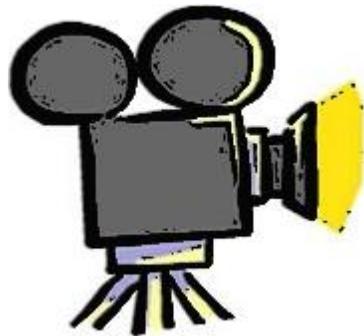
Constat :

Les élèves ne tirent pas parti de l'organisation en groupements.

Interprétation :

Ils ne mettent pas en relation les groupements et la numération de position.

L'ECLAIRAGE D'ERIC MOUNIER



Séquence vidéo de classe
33min 40 --> 38min 37

Constat :

Des difficultés à « voir » dans l'écriture chiffrée « 42 »,
la réponse 4 dizaines et 2 unités ...

Questionnement :

→ Est-il alors possible d'enseigner les écritures chiffrées de nombres que les élèves ne connaissent pas encore :

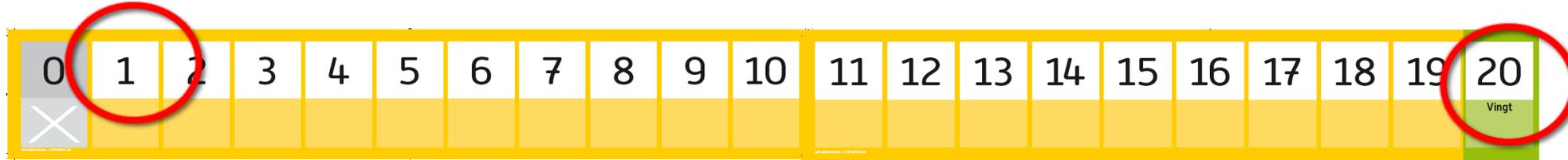
- sans partir de la numération orale,
- avec des tâches favorisant aussi la procédure organisation / codage ?

→ Comment l'apprentissage des deux numérations peut-il s'articuler afin de renforcer la compréhension de chacune ?

DES PISTES

1. Mettre l'accent sur les régularités

Numération orale



REPERANT

2. Travailler rapidement les comptines jusqu'à 60 au CP

Grande comptine de un à dix-neuf	vingt	Petite comptine de un à neuf	trente	Petite comptine de un à neuf	quarante	Petite comptine de un à neuf	cinquante	Petite comptine de un à neuf	soixante	Grande comptine de un à dix-neuf	vingts	quatre-	Grande comptine de un à dix-neuf	cent
Période 1														
Période 2														
Période 3														
Périodes 4 et 5														

3. Construire la numération écrite à partir de nombres dont les élèves ne connaissent pas encore le nom

3'. Proscrire le décryptage des écritures reconnues globalement

→ Dans des activités d'encodage / décodage

i.e. Écrire le nombre qui correspond à

2 paquets de 100, 7 paquets de 10 et 5 unités

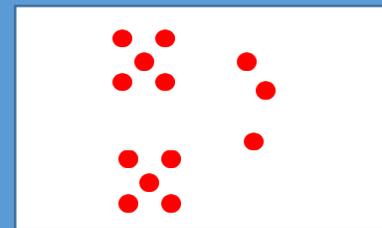
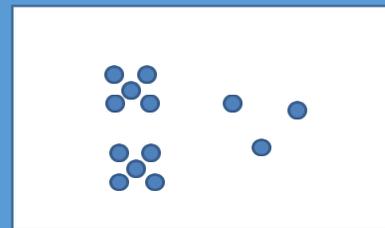
→ Dans des tâches de comparaison

i.e. comparer 2 collections organisées

Comparer **rapidement** le cardinal de 2 collections d'objets



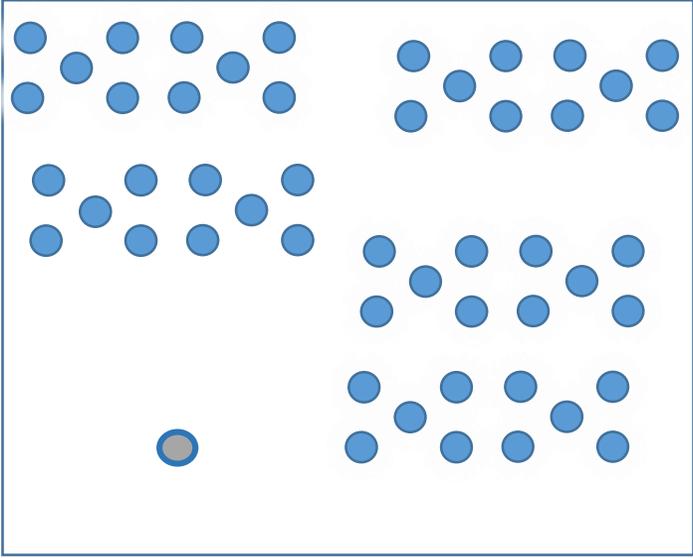
La solution du problème passe
par l'**organisation en groupes identiques**



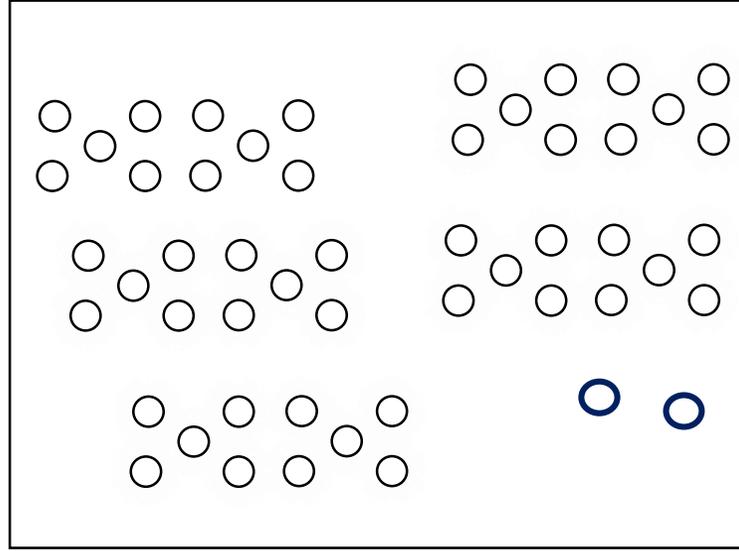


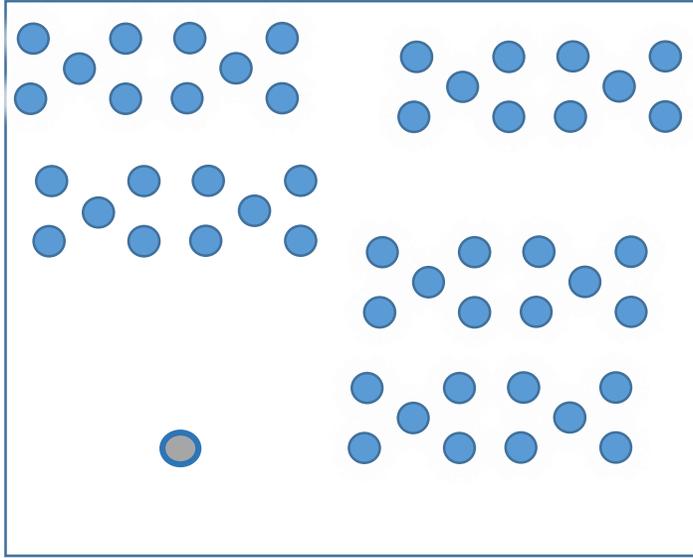
C
O
M
P
A
R
E
R



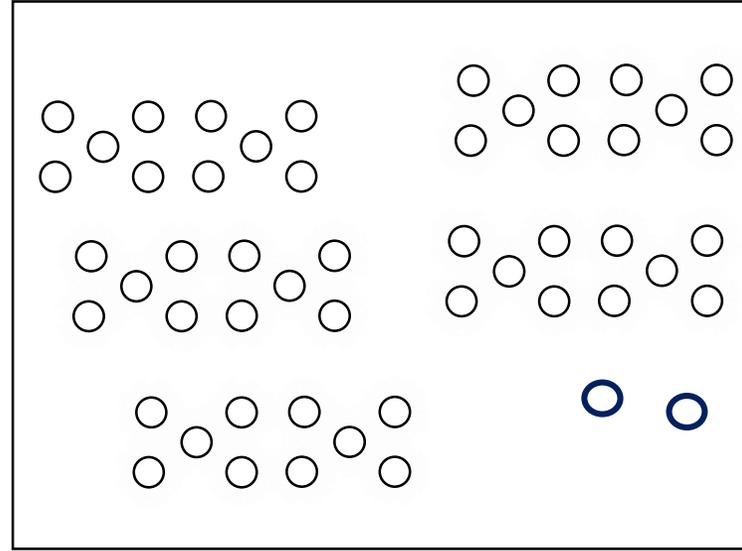


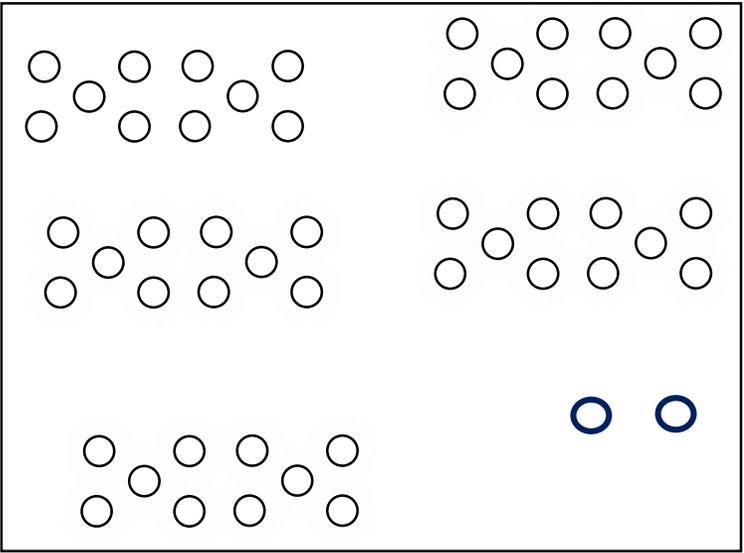
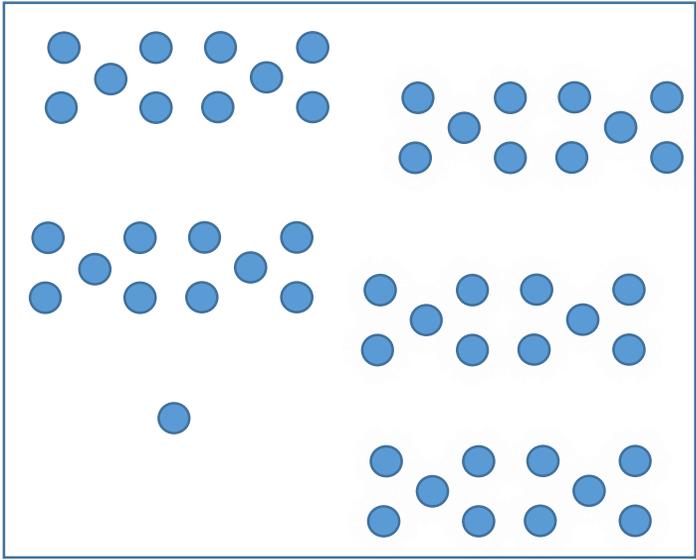
C
O
M
P
A
R
E
R





V
A
L
I
D
E
R





C
O
D
E
R

É
C
R
I
R
E

C
O
M
P
A
R
E
R

Cinq dizaines et un

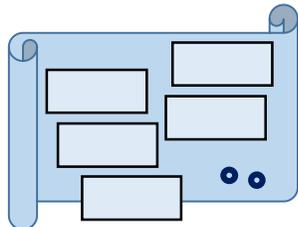
XXXXX I

5X I

51

15

5
1



00000 I

52

4. Prévoir le nombre de chiffres des nombres dictés

Identifier le *frame* en amont
(*le nombre de chiffres que comporte les nombres*)

Pourquoi ?

Parce que réussir à coder n'importe quel
nombre en écriture chiffrée est un
prédicteur des performances
mathématiques ultérieures des élèves

5. Faire dialoguer les 2 numérations

AVEC la file numérique

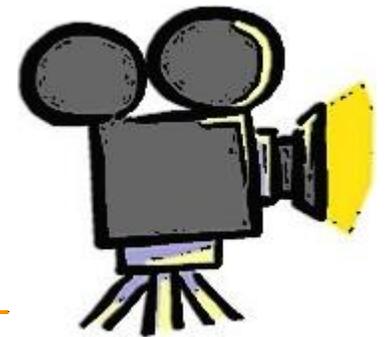
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
X																					Vingt

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
									Trente											Quarante

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
									Cinquante											Soixante

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
																				Quatre-vingts

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	cent	



Concrètement...

60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
Soixante																				Quatre-vingts

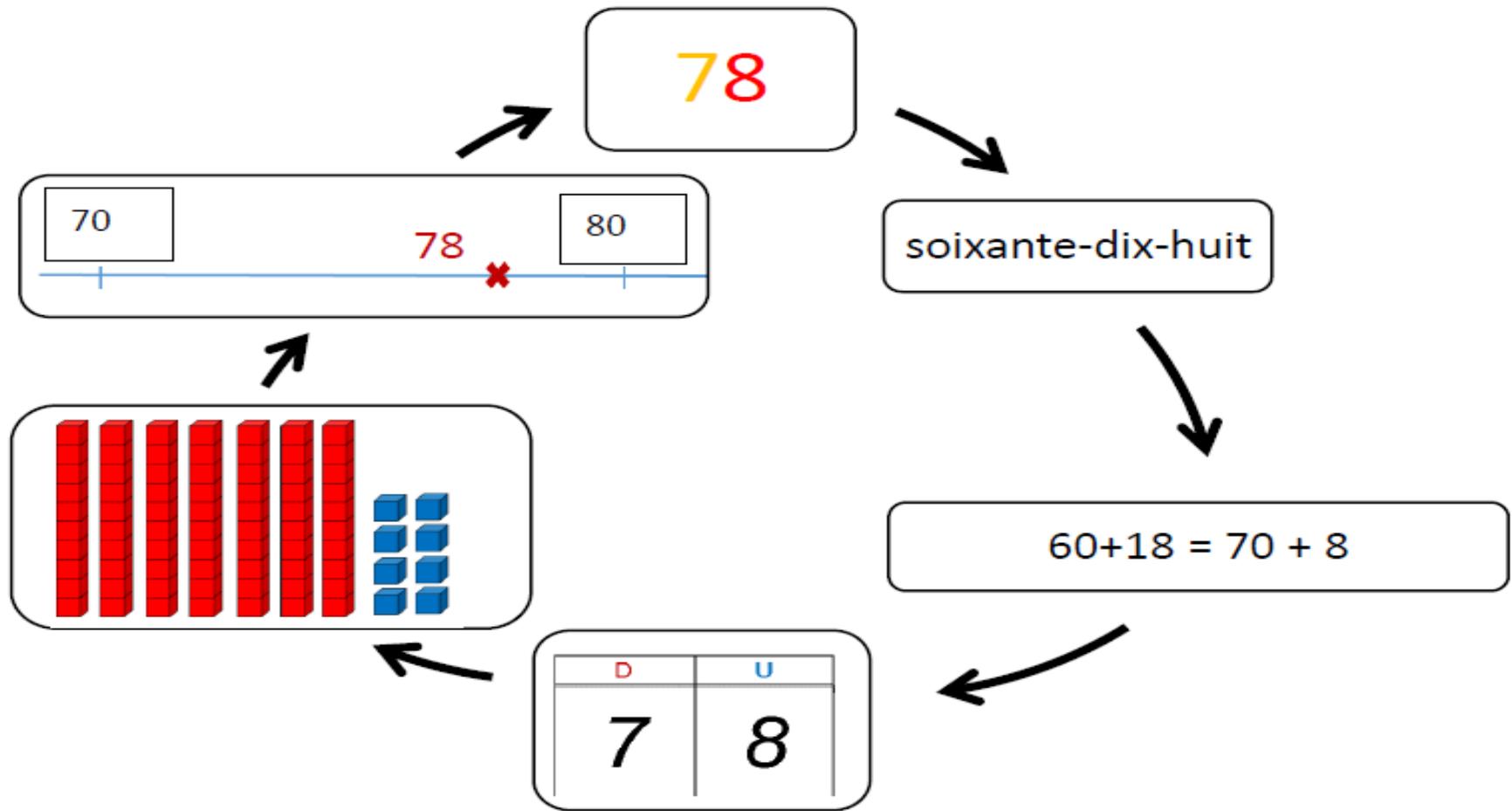
Comment écrire soixante-douze ?

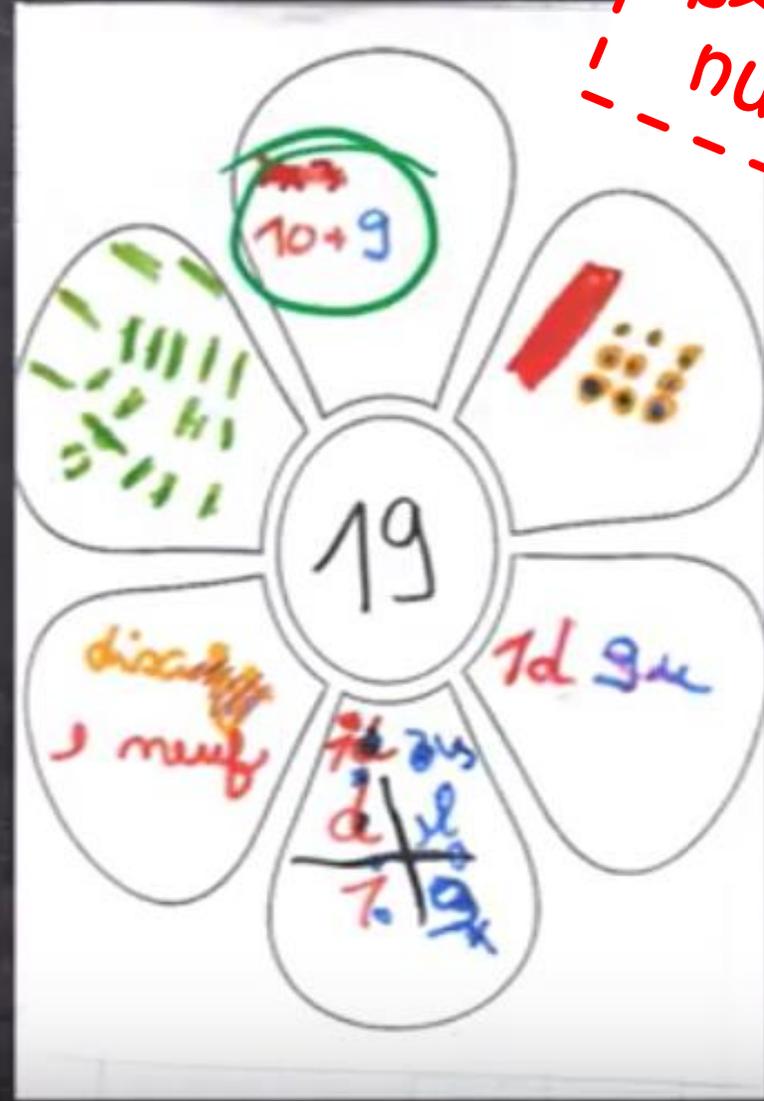
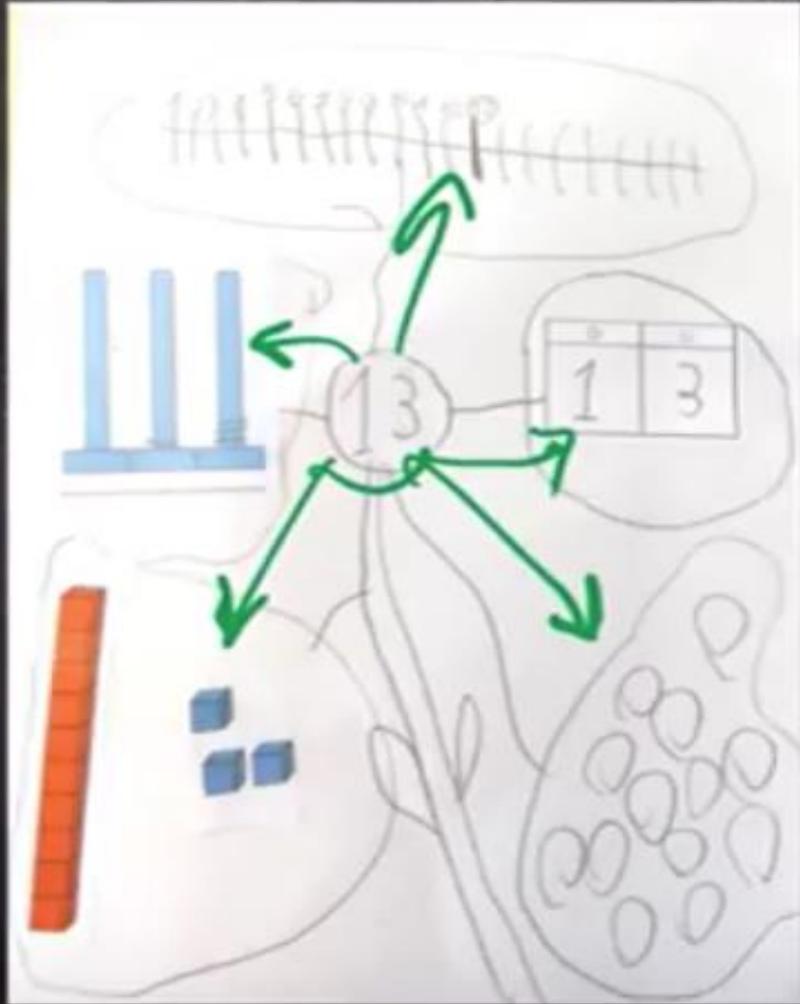
Comment dire « 72 » ?

6. Faire dialoguer les 2 numérations → Varier les représentations

SANS la file numérique

Représentations travaillées :





SANS la file numérique



SANS la file
numérique

Nom du nombre écrit avec des lettres	Quantité	Écriture avec des chiffres	Avec les mots dizaines et unités (restantes)	Avec une addition $10 + \dots$
Onze				
Douze				

Quelle continuité jusqu'au CE2 ?

→ Avec les unités de numération

Introduction de la centaine comme étant 10 dizaines (100u) :

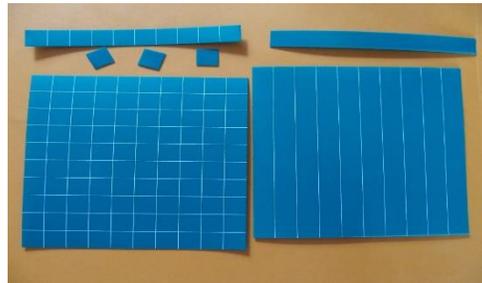
comment s'écrit 12d 3u ?

Introduction du millier comme étant 10 centaines (100d et 1000u):

→ Comment s'écrit 12c 3d 5u ?

Verbaliser les actions, comparer, écrire les nombres : 12d 10c 8u 2m

→ Avec les unités de numération



1 unité	1 dizaine 10 unités	1 centaine 10 dizaines 100 unités	1 millier 10 centaines 100 dizaines 1000 unités
.		

Les collections ne sont pas toujours organisées en un nombre maximal de milliers, centaines, dizaines.

DES POINTS DE VIGILANCE

1. Programmer l'enseignement des deux numérations

La numération orale (comptine)

Grande comptine de un à dix-neuf	vingt	Petite comptine de un à neuf	trente	Petite comptine de un à neuf	quarante	Petite comptine de un à neuf	cinquante	Petite comptine de un à neuf	soixante	Grande comptine de un à dix-neuf	vingts	quatre- Grande comptine de un à dix-neuf	cent	
Période 1														
Période 2														
Période 3														
Périodes 4 et 5														
Séances pour préparer les EC			Les EC des nombres de 1 à 99			Le lien entre les deux systèmes de numération								
Pas d'enseignement sur la signification des chiffres			Construire les EC			Lire, dire, écrire les nombres de 1 à 99								

Programmer l'enseignement des deux numérations

La numération orale (comptine)

Grande comptine de un à dix-neuf	vingt	Petite comptine de un à neuf	trente	Petite comptine de un à neuf	quarante	Petite comptine de un à neuf	cinquante	Petite comptine de un à neuf	soixante	Grande comptine de un à dix-neuf	vingts	quatre- vingts	Grande comptine de un à dix-neuf	cent
Période 1		Période 2			Période 3				Périodes 4 et 5					
Séances pour préparer les EC			Les EC des nombres de 1 à 99		Le lien entre les deux systèmes de numération									
Nécessité de la dizaine pour organiser des collections afin de les comparer			Coder l'organisation		Utiliser une file numérique adaptée pour passer de l'une à l'autre ... ou ne pas en utiliser									

Recommandations de O. HUNAUT, IGEN

En CP

- Janvier/février au plus tard : les nombres jusqu'à 59 pour travailler longuement sur la numération : groupement par 10, cassage de dizaine, somme de deux entiers, différence entre deux entiers, etc.
- En mars au plus tard : les nombres jusqu'à 100 (Disposer d'au moins trois mois pour travailler sur les nombres entre 70 et 100)

Du CE1 vers le CE2

- introduction très précoce des nombres jusqu'à 1000 avec une poursuite du travail sur les nombres inférieurs à 100 (en travaillant les nombres jusqu'à 1000)
- un travail tout au long de l'année sur les nombres jusqu'à 1000 pour que ces nombres soient bien maîtrisés à l'entrée du CE2

2. Utiliser le vocabulaire des unités de numération pour verbaliser les actions

comparer des nombres:

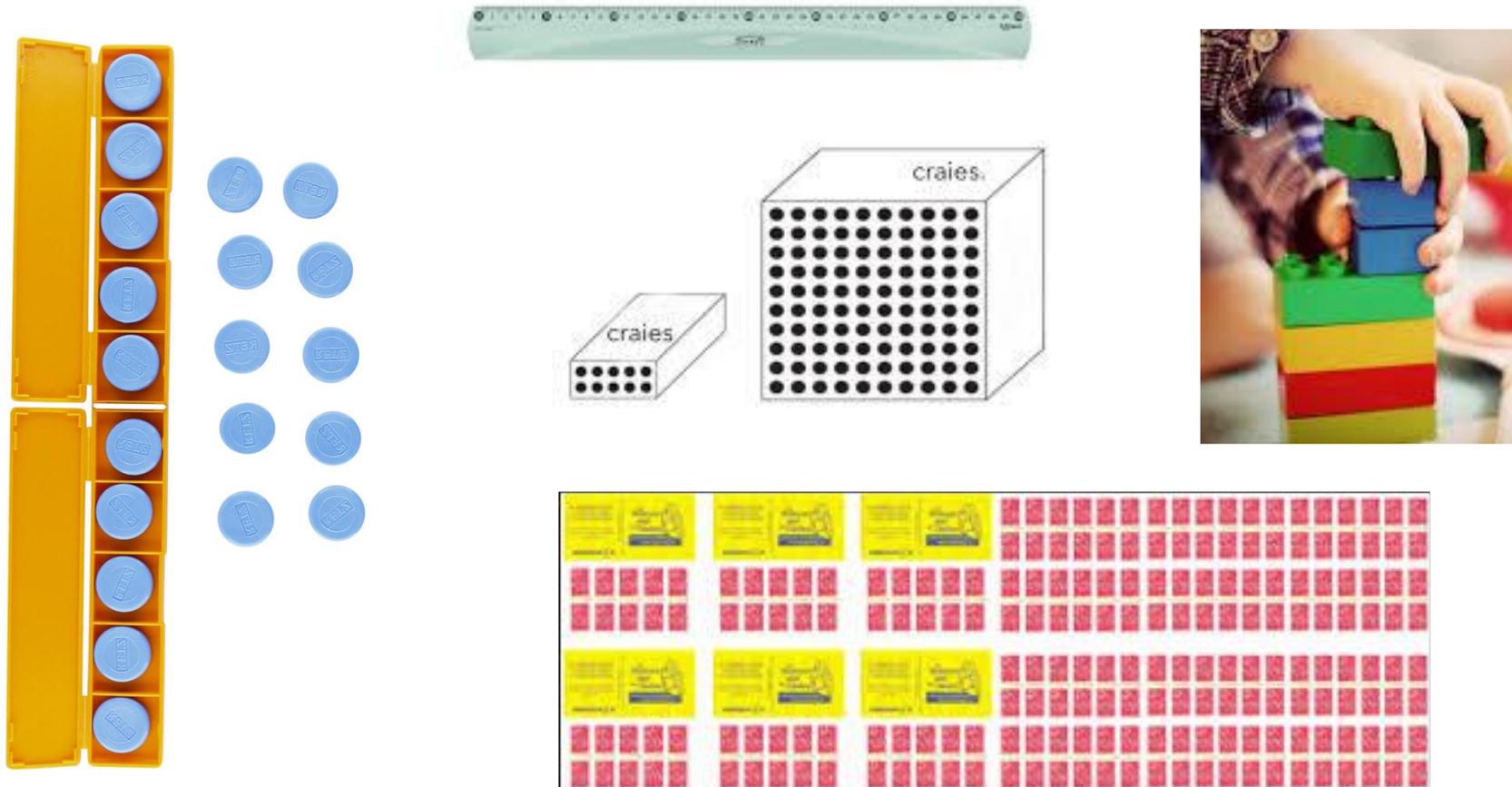
- *3d 12u et 4d 5u*
- *21u 5d et 72u*
- *4c 12d et 4c 1d et 9 u*

écrire les nombres :

- *3d 12u*
- *4d 5u*
- *21u 5d*
- *72u*

3. Multiplier les contextes

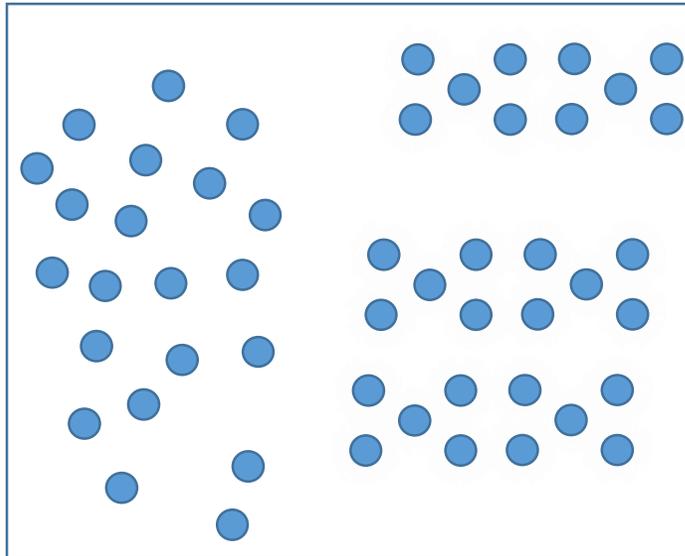
(collections organisées ou non, manipulables ou non)



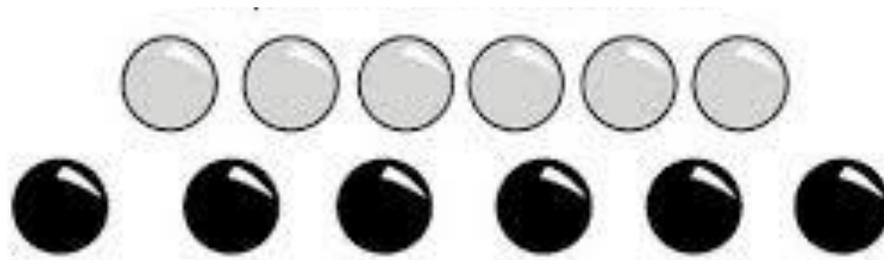
Passer du « *nombre de ...* » au « *nombre...* »

4. Multiplier les organisations (manipulables ou non)

→ Confronter les élèves à des collections présentant un nombre d'unités >9



→ Jouer sur le critère visio-spatial



EN CONCLUSION...

L'ENSEIGNEMENT DU NOMBRE

Construction du NOMBRE

- 2 modes de représentation des nombres **distincts**
- des **propriétés** mathématiques **différentes**

Numération
orale

Succession
du nom des nombres

#**Ordinal**

Numération
écrite

système de numération
décimal de position

Codage organisé
des **quantités**

#**Cardinal**

Une formation en 3 temps

1) Une conférence – 2h

→ L'enseignement du **nombre**

2) Un parcours M@gistère - 5h

→ L'enseignement du **nombre** et du **calcul**

□ Calcul en ligne, calcul mental et calcul posé (3h30)

□ Mises en œuvre dans les classes (1h30)

3) Un retour en équipe sur les 2 premiers temps de formation – 2h

→ **Présentiel accompagné d'un formateur** au *cycle 2*

→ En **autonomie** avec une proposition de travail en *maternelle* et au *C3*

DES PISTES

1. Mettre l'accent sur les régularités

2. Travailler rapidement les comptines jusqu'à 60 au CP

**Numération
orale**

3. Construire la numération écrite
à partir de nombres dont les élèves ne connaissent pas encore le nom

3'. Proscrire le décryptage des écritures reconnues globalement

4. Prévoir le nombre de chiffres des nombres dictés

5. Faire le lien entre les 2 numérations
via une file numérique adaptée

6. Faire le lien entre les 2 numérations
sans file numérique : → varier les représentations

**Numération
écrite chiffrée**

DES POINTS DE VIGILANCE

1. Programmer l'enseignement des deux numérations

2. Utiliser le vocabulaire des unités de numération pour verbaliser les actions

3. Multiplier les contextes (collections organisées ou non, manipulables ou non)

4. Multiplier les organisations (manipulables ou non)