La résolution de problèmes arithmétiques au cycle 1

Sandrine BEUVE – CPD maternelle
Soléna Briand – CPC Carentan
Laure Levrard – CPC St Lô Nord

Qu’est-ce qu’un problème ?

Que retenir?

1. une situation initiale
2. un but à atteindre
3. une suite d’actions ou d’opérations nécessaire pour atteindre ce but
4. **une solution qui n’est pas disponible d’emblée**

Quels usages des problèmes en classe ?

En classe, **deux usages** des problèmes sont observés :

- Le problème comme **« outil / modalité d'apprentissage »** : apprendre **en résolvant** des problèmes.

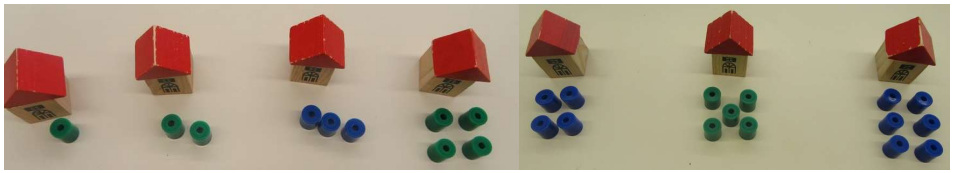
Cette **modalité d'apprentissage** est fortement mobilisée en maternelle et dépasse le champ des mathématiques. Quand elle est mobilisée en mathématiques cette modalité d'apprentissage permet de donner du **sens** au nombre et de **construire** le concept de nombre.

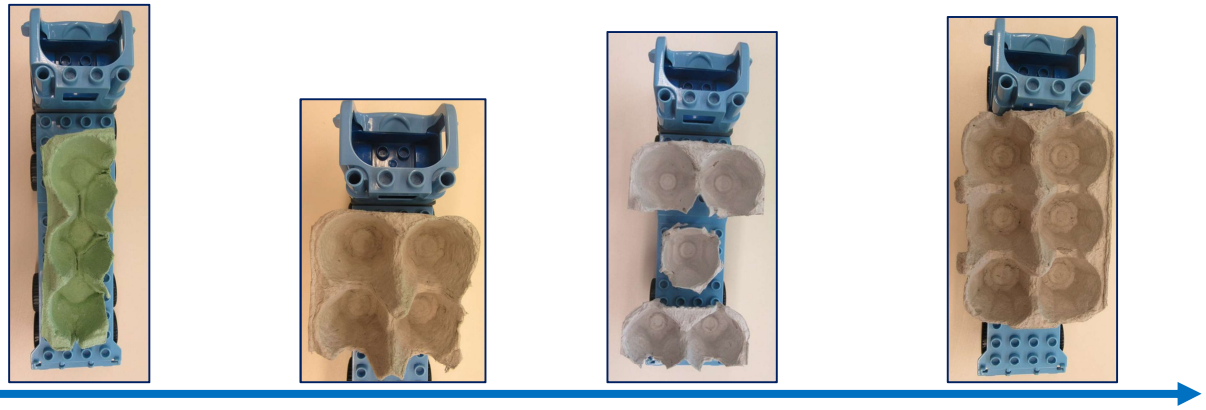
- Le problème comme **« objet d'apprentissage »** : apprendre **à résoudre** des problèmes.

Dans cet usage du problème, l'enfant **réinvestit** des compétences mathématiques déjà construites pour résoudre des problèmes et développe parallèlement des compétences **méthodologiques** qui lui permettront de progresser en résolution de problème.

Le problème comme « **outil** / **modalité** d'apprentissage » : apprendre **en résolvant** des problèmes : UN EXEMPLE

UN EXEMPLE EN GRANDE SECTION DE MATERNELLE :





Défi 1	Défi 2	Défi 3	Défi 4
X = 3	X = 4	X = 5	X = 6

<u>Problème à résoudre</u> : comment ramasser X poubelles en s'arrêtant devant 1, 2, 3, 4, 5, 6 maisons ?

<u>Ce que l'enfant va apprendre en résolvant ce problème :</u>

- décomposer et recomposer des petits nombres par manipulation effective puis mentale ;
- parler des nombres à l'aide de la décomposition.

Le problème comme « **objet** d'apprentissage » : apprendre **à résoudre** des problèmes : UN EXEMPLE

<u>Composition de 2 états</u> : on cherche le tout.

<u>Ce que l'enfant va réinvestir :</u>

- recomposer des petits nombres par manipulation mentale ou effective ;
- parler des nombres à l'aide de la décomposition.

<u>L'enfant va développer une méthodologie :</u>

- c'est un problème où l'on met ensemble
- comment je peux (me) représenter cette situation ?

C'est ce que nous allons approfondir pendant cette formation en nous focalisant sur les **problèmes arithmétiques.**

La résolution de problèmes dans les programmes en résumé

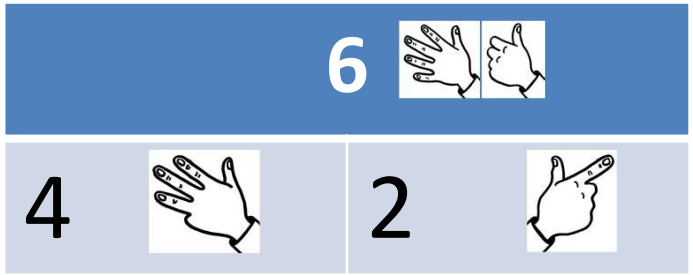
Du **nombre de** ….

MANIPULER

1. Pour s'approprier le problème.
2. Pour raisonner, éprouver des stratégies.

4 pommes jaunes et encore 2 pommes rouges ça fait 6 pommes.
4 et encore 2 ça fait 6.
(*l'usage des doigts soutient alors le langage pour aider l'enfant à accéder à l'abstraction*)

VERBALISER



ABSTRAIRE

3. Pour **vérifier** le résultat obtenu par **anticipation**.

… au **nombre.**

<u>Aujourd'hui : temps 2</u> :

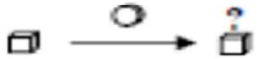
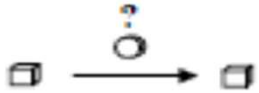
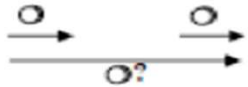
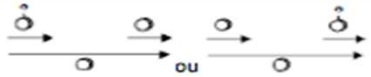
4. Quelle **catégorisation** des problèmes ?

5. Des **exemples** d'énoncés et de mises en œuvre.

6. Quels usages des **doigts** ?

4.Quelle catégorisation des problèmes ?

Catégorisation simplifiée selon Vergnaud

	Catégorie	Schéma	Opération	Exemple
Problèmes d'additions / de soustractions □ = nombre d'objets ou mesure ou position sur piste graduée O = transformation/composition positive ou négative	Composition de 2 états		On cherche le tout. **Addition**	A midi, j'ai bu 2 verres d'eau et 1 verre de jus d'orange. *Combien de verres ai-je bu en tout ?*
			On cherche une partie. **Soustraction**	Dans notre cour, nous avons 5 bancs. Pendant la récréation 3 bancs sont occupés par des enfants. *Combien de bancs sont vides ?*
	Transformation d'un état		**On cherche l'état final.** **Addition / Soustraction**	Tu avais 2 petites voitures Je t'en donne encore 1. *Combien en as-tu maintenant ?*
			On cherche la transformation **Soustraction**	Pose 5 cubes sur la table. *Que dois-tu faire pour en avoir 7 ?*
			On cherche l'état initial. **Soustraction / Addition**	J'ajoute 3 bonbons dans la boîte. Maintenant, j'en ai 5. *Combien la boîte contenait-elle déjà de bonbons ?*
	Comparaison d'états + ou -		On cherche l'écart + ou - (de +, + que / de -, - que) **Addition / Soustraction**	Alexis a 3 ans. Il a 1 an de plus (ou de moins) que sa sœur. *Quel âge a la sœur d'Alexis ?*
			On c herche la comparaison **Addition / Soustraction**	Sur une assiette, il y a 2 gâteaux. Sur une autre, il y en a 5. *Combien y a-t-il de gâteaux de plus dans la 2e assiette ?*
	Composition de transformations + ou -		**On cherche la transformation composée.** **Addition**	Sur le jeu de l'oie, tu avances de 2 cases. Puis, tu avances encore d'une case. *De combien de cases as-tu avancé en tout ?*
			On recherche une composante. **Soustraction**	Dans une boîte, tu mets 2 fois des cubes. La 1ère fois, tu en mets 2. *Combien en mets-tu la 2e fois si au total tu en as mis 5 ?*

4. Quelle catégorisation des problèmes ?

Problèmes de multiplications / de divisions A = valeur d'un paquet B = nombre de paquets	n fois plus n fois moins	Problèmes ternaires (2 termes connus + 1 inconnu)	**Division / Multiplication**	Pierre a 17 ans. Son père est trois plus âgé que lui. *Quel âge a-t-il ?*
	Produit cartésien A x B = ?		**Multiplication**	Je possède 3 vestes et 4 pantalons. *Combien puis-je former de tenues différentes ?*
	Configuration rectangulaire		**Division / Multiplication**	La longueur de mon terrain fait 15 m, sa largeur fait 9 m. *Quelle est son aire ?*
	Division Quotition "Nombre de parts"	Problèmes quaternaires (3 termes connus + 1 inconnu)	**Division**	Pierre a 12 € et veut acheter des paquets de bonbons à 3 €. *Combien de paquets peut-il acheter ?*
	Division Partition "Valeur de la part"		**Division**	J'ai payé 21 € pour 3 bouteilles de vin. *Quel est le prix d'une bouteille ?*
	Proportionnalité		**Multiplication**	4 albums coûtent 6 €. *Combien coûtent 12 albums ?*

Parmi toutes ces catégories de problèmes, lesquelles **traiter prioritairement** à l'école maternelle ?

Problèmes d'additions / de soustractions

- **Composition de 2 états** : on peut chercher **le tout ou une partie du tout.**
- **Transformation d'un état** : une quantité de départ subit une ou plusieurs transformations. **En maternelle on cherchera uniquement l'état final.**

Problèmes de multiplications / de divisions

- **Produit cartésien A x B = ?**
- **Division partition « valeur de la part »**
- **Proportionnalité**

5. Des exemples d'énoncés et de mises en œuvre de la PS à la GS

- **La résolution de problèmes** s'appuie sur l'usage d'un matériel « *variés et tangibles* ».

Un exemple de boîtes à problèmes :

Problèmes d'additions / de soustractions

<u>Composition de 2 états</u> : on peut chercher le tout ou une partie du tout.

Composition de 2 états		On cherche le tout. **Addition**	A midi, j'ai bu 2 verres d'eau et 1 verre de jus d'orange. *Combien de verres ai-je bu en tout ?*
		On cherche une partie. **Soustraction**	Dans notre cour, nous avons 5 bancs. Pendant la récréation 3 bancs sont occupés par des enfants. *Combien de bancs sont vides ?*

On cherche le tout.

Lila a 2 pièces, Noa a 1 pièce.
Combien y a-t-il de pièces en tout?

On cherche une partie du tout.

J'ai eu 5 pièces à mon anniversaire. J'en ai laissé 3 sur la table et j'ai rangé toutes les autres dans le coffre.
Combien y en a-t-il dans le coffre ?

Quelle mise en œuvre en classe ?

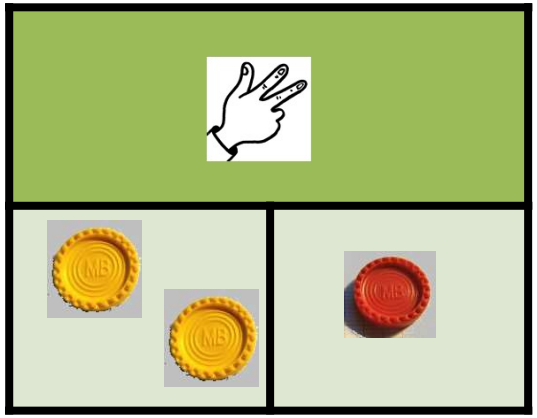
- **Composition de 2 états : on recherche le tout.**

<u>Un exemple en petite section.</u>

Lila a 2 pièces, Noa a 1 pièce.
Combien y a-t-il de pièces en tout?

« 2 jetons jaunes et encore 1 jeton rouge ça fait 3 jetons.
2 et encore 1 ça fait 3. »

(*l'usage des doigts soutient alors le langage pour aider l'enfant à accéder à l'abstraction*)



Du nombre de … … au nombre.

MANIPULER VERBALISER ABSTRAIRE

À quelle condition cette situation relève-t-elle de la <u>résolution de problème arithmétique</u> si on laisse les élèves manipuler?

Feuille de papier

Faire des mathématiques, c'est anticiper, c'est donc dans ce cas résoudre le problème sans avoir le matériel sous les yeux .

Si le dénombrement n'est pas possible (collections invisibles), l'élève devra pour résoudre le problème :

- mobiliser des représentations mentales
- utiliser ses connaissances sur les nombres
- mettre en œuvre des procédures de plus haut niveau.

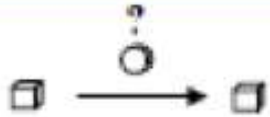
Quelle aide proposer aux élèves ?

Tous les élèves ne mobiliseront pas spontanément des représentations mentales ou leurs connaissances sur les nombres donc du **matériel permettant la manipulation ou la représentation de la situation** doit être proposé :

- Des jetons, des cubes
- L'utilisation de leur doigt
- Des ardoises et des feutres

Problèmes d'additions / de soustractions

<u>Transformation d'un état</u> : une quantité de départ subit une ou plusieurs transformations positives ou négatives. On peut chercher l'état initial ou l'étal final ou la transformation.

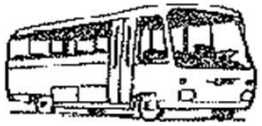
Transformation d'un état		**On cherche l'état final.** **Addition / Soustraction**	Tu avais 2 petites voitures Je t'en donne encore 1. *Combien en as-tu maintenant ?*
		On cherche la transformation **Soustraction**	Pose 5 cubes sur la table. *Que dois-tu faire pour en avoir 7 ?*
		On cherche l'état initial. **Soustraction / Addition**	J'ajoute 3 bonbons dans la boîte. Maintenant, j'en ai 5. *Combien la boîte contenait-elle déjà de bonbons ?*

Transformation d'un état : recherche de l'état final

Paul a garé 2 voitures devant sa maison.
Il en arrive encore 1.
Combien de voitures sont garées devant la maison maintenant ?

Dans le bus, il y a 4 enfants. A l'arrêt suivant, 2 enfants descendent.
Combien y-a-t-il d'enfants à présent dans le bus ?

Problèmes d'additions / de soustractions
Quelle progressivité ?



« Dans le bus il y a 3 filles et 2 garçons. Combien y a-t-il d'enfants en tout ? »

« Il y a 5 enfants en tout dans le bus. Parmi ces 5 enfants il y a 3 filles. Combien y a-t-il de garçons ? »

« Dans le bus il y a déjà 3 enfants, à l'arrêt suivant 2 autres enfants montent. Combien y a-t-il d'enfants maintenant dans le bus ? »

Composition de 2 états

Transformation d'un état

Rechercher le tout

Rechercher une partie

Transformation positive /négative

Ce problème peut-être ritualisé.

Problèmes de multiplications / de divisions.

Produit cartésien A x B = ? :

n fois plus n fois moins	Problèmes ternaires (2 termes connus + 1 inconnu)	**Division / Multiplication**	Pierre a 17 ans. Son père est trois plus âgé que lui. *Quel âge a-t-il ?*
Produit cartésien A x B = ?		**Multiplication**	Je possède 3 vestes et 4 pantalons. *Combien puis-je former de tenues différentes ?*
Configuration rectangulaire		**Division / Multiplication**	La longueur de mon terrain fait 15 m, sa largeur fait 9 m. *Quelle est son aire ?*

Produit cartésien : tableau à double entrées.

La situation de référence
Le jeu des maisons :
Critère de réussite : pour gagner, tu dois trouver toutes les maisons possibles construites avec ces toits et ces murs.

Attention, chaque maison doit avoir un seul toit et un seul mur. Il ne doit pas y avoir 2 maisons identiques.

Produit cartésien : additions réitérées

Il y a 3 écureuils. Chacun veut manger 2 noix.
Combien dois je prendre de noix dans la boite ?

À quelle condition les élèves ne sont <u>pas uniquement en manipulation passive</u> ?

Faire des mathématiques, c'est anticiper, c'est donc dans ce cas résoudre le problème sans déplacer le matériel.

Si la distribution n'est pas possible (collection non déplaçable), l'élève devra pour résoudre le problème :

- mobiliser des représentations mentales
- utiliser ses connaissances sur les nombres
- mettre en œuvre des procédures de plus haut niveau : représentation de la situation avec des jetons, les doigts, dessin…

Quelle mise en œuvre en classe ?

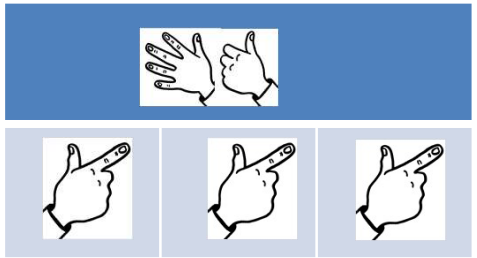
➢ **Produit cartésien :**

<u>Un exemple en moyenne section.</u>

On peut demander d'anticiper le résultat puis de vérifier en manipulant

« 2 noix et encore 2 noix et encore 2 noix ça fait 6 noix.
2 et encore 2 et encore 2 ça fait 6. »

(*l'usage des doigts soutient alors le langage pour aider l'enfant à accéder à l'abstraction*)



Du nombre de … … au nombre.

MANIPULER VERBALISER ABSTRAIRE

Problèmes de multiplications / de divisions.

Division Quotition "Nombre de parts"	Problèmes quaternaires (3 termes connus + 1 inconnu)	**Division**	Pierre a 12 € et veut acheter des paquets de bonbons à 3 €. *Combien de paquets peut-il acheter ?*
Division Partition "Valeur de la part"		**Division**	J'ai payé 21 € pour 3 bouteilles de vin. *Quel est le prix d'une bouteille ?*
Proportionnalité		**Multiplication**	4 albums coûtent 6 €. *Combien coûtent 12 albums ?*

Division partition : valeur de la part.

Chaque enfant doit avoir autant de ballons.
Il ne doit pas rester de ballon.
Combien de ballons dois-je donner à chaque enfant ?

Proportionnalité.

Lors de la réalisation des gâteaux d'anniversaire :
Pour réaliser un gâteau il me faut 3 œufs, combien dois-je en acheter si je veux faire 2 gâteaux ?

GÂTEAU AU CITRON

INGRÉDIENTS

3 oeufs	2 verres de sucre	1 pot de crème	3 verres de farine	1 sachet de levure	1 jus de citron

De quelles variables disposons-nous pour faire évoluer ce problème ?

- Matériel : déplaçable : oui / non
- Partage équitable : oui / non
- Avec / sans reste
- Nombre de parts (l'enfant pourra t-il prendre appui sur les doubles ?).

Ce problème peut-être ritualisé.

En résumé les catégories de problèmes à **traiter prioritairement** à l'école maternelle sont :

Problèmes d'additions / de soustractions

- **Composition de 2 états** : on peut chercher **le tout ou une partie du tout.**
- **Transformation d'un état** : une quantité de départ subit une ou plusieurs transformations. **En maternelle on cherchera uniquement l'état final.**

Problèmes de multiplications / de divisions

- **Produit cartésien A x B = ?**
- **Division partition « valeur de la part »**
- **Proportionnalité**

… mais quelques points de vigilance

Points de vigilance

MANIPULER

- Ne pas rester à une simple manipulation passive qui empêcherait toute anticipation. **Faire des mathématiques c'est anticiper**, dans le cas du panier, une fois que l'enfant s'est approprié le problème, les pommes doivent être cachées.

- Éviter d'utiliser le dénombrement numérotage pour vérifier (« *1, 2, 3, 4, 5, 6 – **6*** »).

L'élève risquerait de s'enfermer dans cette stratégie de bas niveau et ne construirait pas le concept de nombre.

Il faut privilégier les procédures faisant appel à :

- **l'itération de l'unité :**

« J'ai 4 pommes jaunes et encore une pomme rouge ça fait 5 pommes *(entourer du doigt les 5 pommes).* 5 pommes et encore une pomme ça fait 6 pommes *(entourer du doigt les 6 pommes).* »

- **la décomposition des nombres : «** 4 pommes rouges et encore 2 pommes jaunes ça fait 6 pommes **»** *(entourer du doigt les 6 pommes)*

Points de vigilance

VERBALISER

- Les connaissances se forgent autant par l'activité et son observation que par **la verbalisation de l'action**, son examen critique, sa mise en relation avec d'autres expériences vécues (notion de problème référent).
- Le langage contribue à **structurer ses connaissances** et à les mémoriser.
- À l'école maternelle, les élèves ne sont pas tous capables d'expliciter les démarches utilisées : **verbalisation « en miroir ».**
- Verbalisation et usage des doigts peuvent être synchronisés. Les doigts permettent alors d'apporter de l'analogique au verbal.

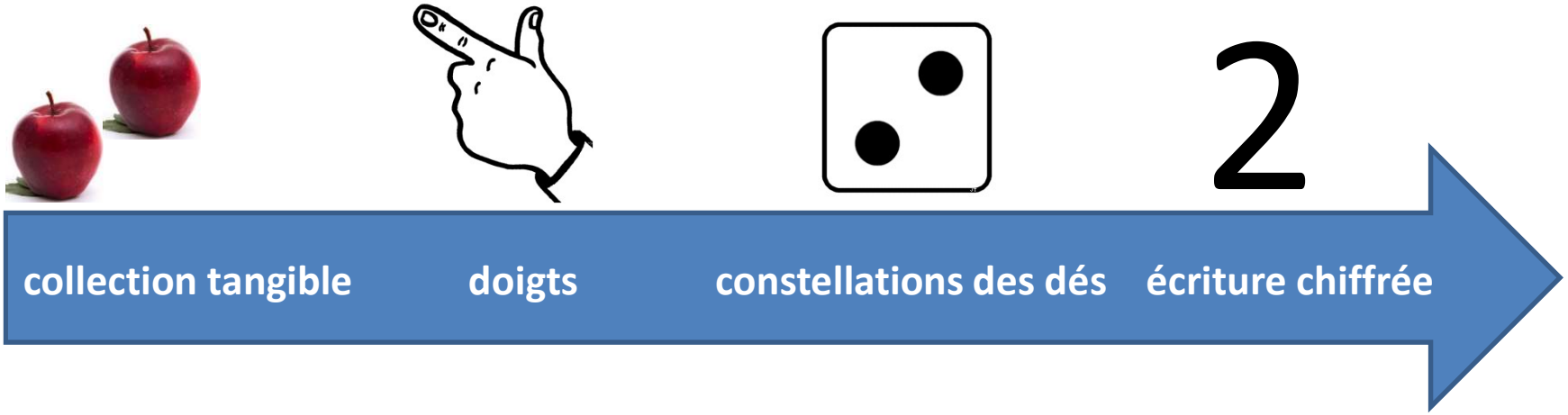
Décomposition du nombre 6.

Points de vigilance

ABSTRAIRE

- **Ne pas « monter trop vite » en abstraction :**

Les doigts : un outil privilégié pour passer de la représentation analogique du nombre (le nombre de…) à sa représentation symbolique (le nombre).

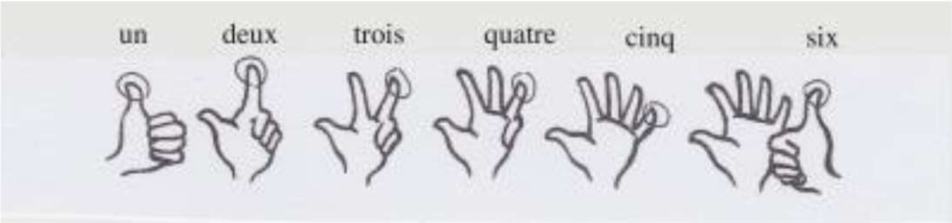


6. Quel usage des doigts ?

- **Les doigts : un outil privilégié pour passer de la représentation analogique du nombre (le nombre de…) à sa représentation symbolique (le nombre).**

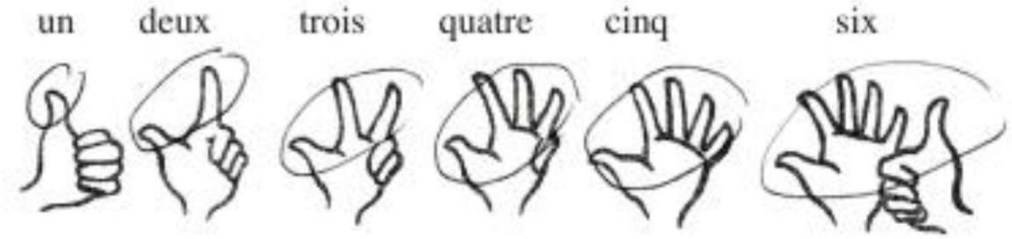
Tous les usages des doigts ne se valent pas :

Obstacle au progrès pour des usages où les doigts sont numérotés (comptage numérotage).



Utilisation **pertinente** pour des stratégies de :

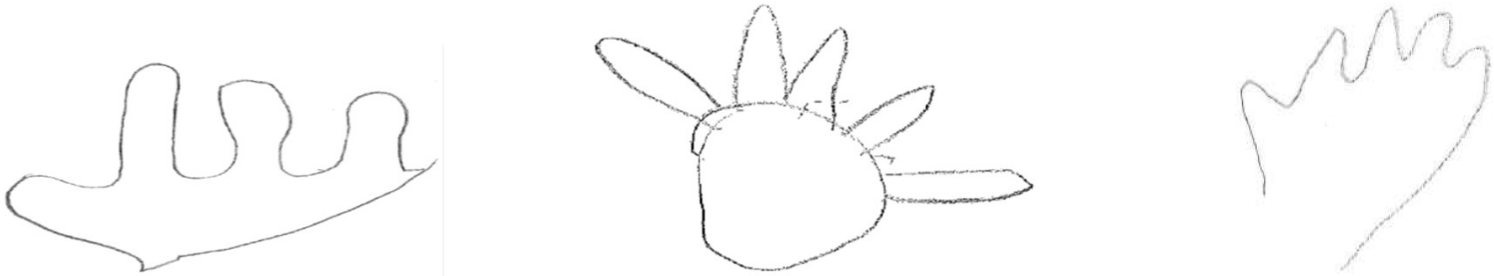
- itération de l'unité,
- décomposition / recomposition,
- comptage – dénombrement.

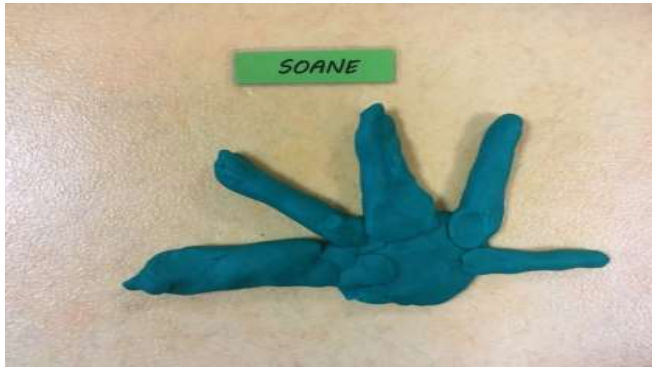


6. Quel usage des doigts ?

- **Les doigts : un indicateur pertinent de l'habileté numérique d'un jeune élève.**

D'après les travaux de Nathalie Bonneton-Botté (MCF Psychologie, INSPE-LP3C & Hélène Hili, Formatrice mathématiques, INSPE)





Comment développer la motricité fonctionnelle des doigts ?

Trois types d'activités peuvent être proposées à l'école maternelle :

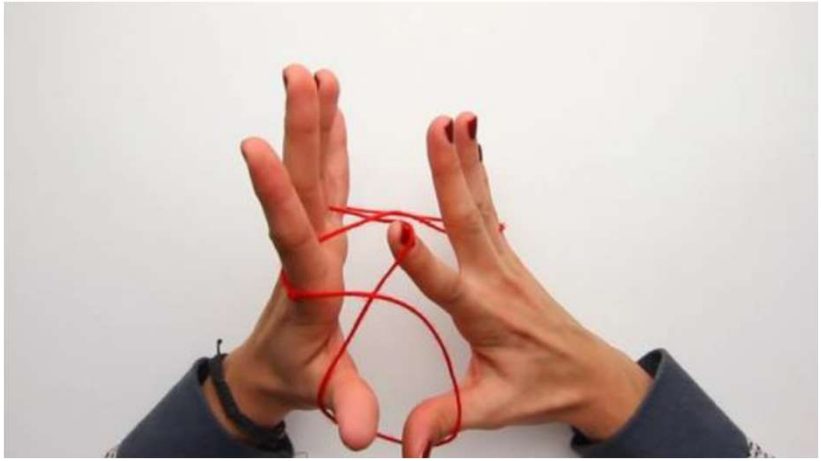
1. **Agilité** avec déliement et musculation des doigts.

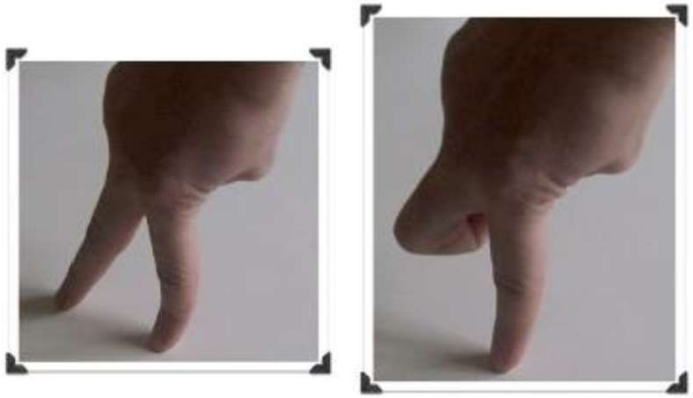
2. **Dextérité** avec des situations de contrôle de l'activités des mains par la vue.

3. **Coordination motrice bilatérale** : travailler la main dominante et non dominante, de façon symétrique et asymétrique.

D'après les travaux de Nathalie Bonneton-Botté (MCF Psychologie, INSPE-LP3C & Hélène Hili, Formatrice mathématiques, INSPE)

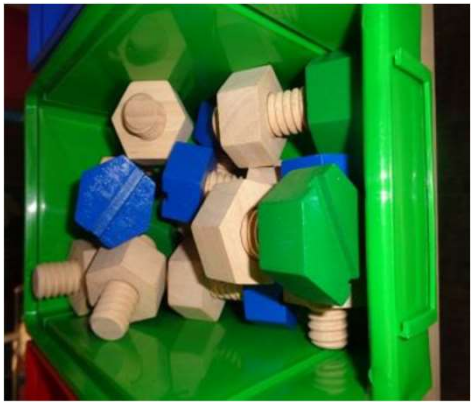
Agilité avec déliement et musculation des doigts.



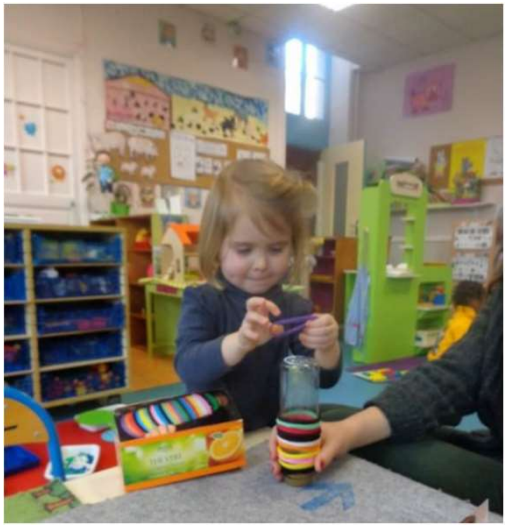


D’après les travaux de Nathalie Bonneton-Botté.

<u>**Dextérité**</u> avec des situations de contrôle de l'activité des mains par la vue.



Activités à coupler avec habilités numériques
«Mettre 3 pièces sur chaque tige»



D'après les travaux de Nathalie Bonneton-Botté.

Coordination motrice bilatérale :

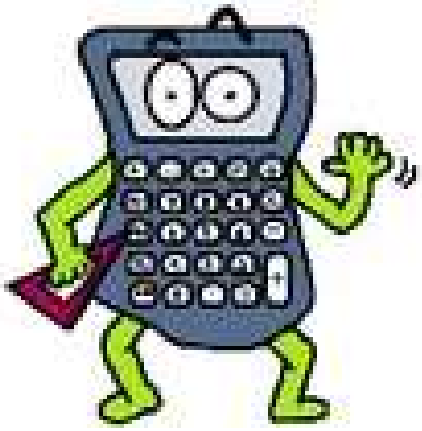
En mathématiques, l'enfant va avoir besoin **d'utiliser ses deux mains**, il est donc nécessaire de travailler la main dominante et non dominante, de façon symétrique et asymétrique.

D'après les travaux de Nathalie Bonneton-Botté.

ACTUALITÉ :
Concours « La course aux nombres 2021 »

Il s'agit d'un concours d'**activités numériques** qui a été créé par le **service pédagogique de l'*Agence pour l'Enseignement Français à l'Étranger***.

Ce concours concerne les élèves **du CP à la terminale** mais le groupe Maths50 a décliné localement une version pour le **cycle 1** afin que chaque élève de l'école primaire puisse participer.



ACTUALITÉ :
Concours « La course aux nombres 2021 »

. Une période d'entrainement : dès maintenant à partir des ressources proposées sur le site Maths 50.

Un exemple en MS :

- Situation 1 :

« *Dans mon bus j'ai déjà 4 enfants. Encore un enfant arrive en courant et monte dans le bus. Combien d'enfants y a-t-il dans mon bus maintenant ?* »

https://drive1.demo.renater.fr/index.php/s/4zXRiiRb6WJJL6K

- Situation 2 :

« *Dans mon bus, il y a 4 enfants. Parmi ces 4 enfants il y a 2 filles. Combien y a-t-il de garçons ?* »

https://drive1.demo.renater.fr/index.php/s/gmrN6FIPKCNiGfP

- Situation 3 :

« *Dans mon bus, il y a 2 filles et 3 garçons. Combien y a-t-il d'enfants en tout dans mon bus ?* »

https://drive1.demo.renater.fr/index.php/s/RtnssXF7cqFSN6E

- Situation 4 :

« Combien y a-t-il d'enfants dans mon bus ? »

- Situation 5 :

« Les enfants sont rangés les uns derrière les autres pour monter dans le bus, peux-tu me montrer l'enfant qui va monter en cinquième dans le bus. »

https://drive1.demo.renater.fr/index.php/s/fS3PrbozJSTmwKL

. **Une épreuve finale** pendant la semaine des mathématiques du **15 au 20 mars 2021**.

Maths 50

Un exemple en PS

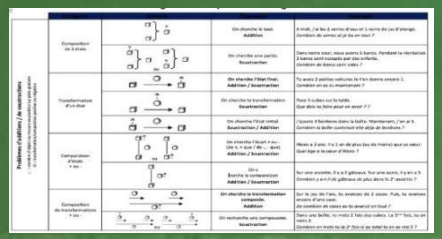
Maths 50

Un exemple en GS

Un autre exemple en GS

<u>Temps 3</u> : en équipe d'école (2h)

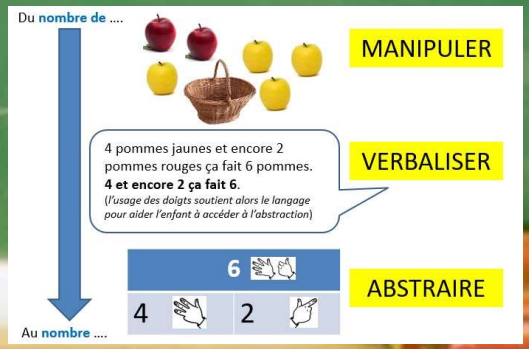
- Quels problèmes arithmétiques proposer à nos élèves ?



(mobiliser la catégorisation de Vergnaud)

- Comment les aider à progresser ?

(mobiliser le triptyque manipuler-verbaliser-abstraire / réflexion sur l'usage des doigts)



MERCI

dsden50-cpdmaternelle@ac-caen.fr